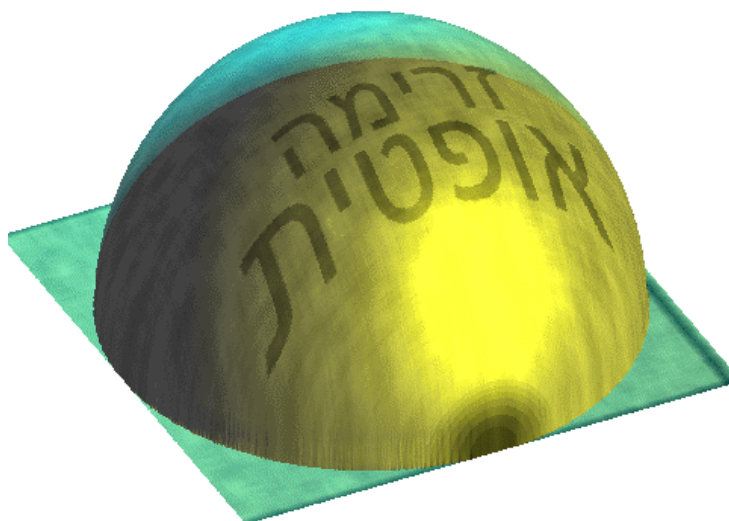


# הגדרה מורחבת של זרימה אופטית

סיכום המאמר של ש. נגדריפור

במסגרת הדרישות לקורס  
מערכות הדמייה לראייה ממוחשבת



מגיש :

צביקה בן-חיים

ת.ז. 034986505

## תקציר

מטרת אלגוריתמי זרימה אופטית הינה לעקוב אחר תנועת "גושים" או "כתמים" של פיקסלים ממקום למקום בסרט וידאו. הגישה הקלאסית לחישוב זרימה אופטית מבוססת על מציאת התאמה בין גושי פיקסלים בפרמים (תמונות) עוקבים (Horn, 1986). גישה זו מניחה, שהארת הפיקסלים אינה משתנה בפרק הזמן החולף בין שני הפרמים. במצבים רבים הנחה זו אינה תקפה.

במאמרו של (Negahdaripour (1998 מרחיבים את ההגדרה של זרימה אופטית, כדי שתכלול גם שינויים פוטומטריים (שינויי הארה). ההרחבה מגדילה את מספר המקרים שבהם ניתן להשתמש באלגוריתמי זרימה אופטית.

בעבודה זו נסקור את הרעיונות של זרימה אופטית קלאסית ואת החידושים של נגדריפור. נראה שהגדרת הזרימה האופטית הינה ill-conditioned ביסודה, ונדגים מספר "אילוצי רציפות" בעזרתם נהוג להתגבר על בעייה זו.

לבסוף, נתאר מספר תוצאות של הפעלת האלגוריתם של נגדריפור על תמונות מסומלצות. מתוך תוצאות אלה נסיק מסקנות על היתרונות והחסרונות של גישת הזרימה האופטית בכלל, ושל האלגוריתם של נגדריפור בפרט, ונציע מספר רעיונות להמשך המחקר, אשר עשויים לשפר את ביצועי האלגוריתם.

## תוכן העניינים

6.....	מטרה.....	.1
7.....	זרימה אופטית קלאסית.....	.2
8.....	זרימה אופטית מורחבת.....	.3
8.....	מגבלות הגישה הקלאסית.....	.3.1
9.....	זרימה אופטית מורחבת.....	.3.2
10.....	מודל התנועה.....	.3.3
11.....	בעיית המפתח.....	.4
12.....	שיטות עבודה.....	.5
12.....	אילוץ הרציפות.....	.5.1
13.....	גודל הבלוק.....	.5.2
14.....	אופרטור הגזירה.....	.5.3
14.....	תוצאות.....	.6
20.....	ניתוח.....	.7
21.....	נושאים להמשך מחקר.....	.8
21.....	יישום זרימה אופטית בעזרת פירמידה גאוסיאנית.....	.8.1
22.....	בחירת אילוץ הרציפות.....	.8.2
22.....	סיכום.....	.9
23.....	נספחים.....	
23.....	יצירת תמונות תלת-מימדיות ב-Matlab.....	א.
24.....	חישוב זרימה אופטית בעזרת SVD.....	ב.
26.....	מקורות.....	

## רשימת איורים

- 7..... איור 1 : פרמים מתוך סרט וידאו
- 8..... איור 2 : פרמים עוקבים, שבהם כתמי צבע זזים ממקום למקום
- 9..... איור 3 : פרמים עוקבים, שבהם כתמי צבע זזים ממקום למקום, ובנוסף משתנה הבהירות
- 11..... איור 4 : שני פרמים מתוך סרט
- 14..... איור 5 : סקאלה עבור תרשימי זרימה פוטומטרית
- 16..... איור 6 : כדור למברטי מסתובב
- 17..... איור 7 : כדור מסתובב עם החזרת Phong
- 18..... איור 8 : כדור מסתובב עם שינוי במצב התאורה
- 19..... איור 9 : אותיות בתנועה

## רשימת סימנים

מספר הסעיף המצוין בצד שמאל מציין את המקום הראשון בו נעשה שימוש של הסימון. בסעיף זה מצויה הגדרה מלאה של הסימון.

סימון	הגדרה	סעיף
$A = UQV^T$	מטריצת התלויות הלינאריות לחישוב הזרימה האופטית, ופירוק ה-SVD שלה	נספח ב
$E(x, y, t)$	פיקסל $(x, y)$ של הפרם שצולם בזמן $t$ מתוך סרט הוידאו	2
$N$	גודל הבלוק עליו מניחים שהזרימה האופטית קבועה	נספח ב
$O(\delta^2)$	איברים מסדר שני ומעלה בפיתוח טור טיילור	2
$\frac{\delta c}{\delta t}$	השינוי הפוטומטרי הקבוע, במודל התנועה המוכלל	3.3
$\frac{\delta E}{\delta t}$	השינוי הפוטומטרי בזרימה אופטית מורחבת	3.2
$\frac{\delta m}{\delta t}$	השינוי הפוטומטרי הפרופורציונלי לעצמת האור, במודל התנועה המוכלל	3.3
$(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t})$	שדה הזרימה האופטית (הקלאסית), בפיקסלים ליחידת זמן	2
$\mathcal{E}_i$	השגיאה במשוואת הזרימה האופטית עבור הפיקסל ה- $i$	נספח ב

## 1. מטרה

אלגוריתמי זרימה אופטית מהווים שלב עיבוד נמוך בתהליך הבנה של סרטי וידאו. מטרת-העל ב"הבנה מלאכותית" כזו היא ליצור אוסף אלגוריתמים, אשר יאפשר למחשב להסיק מסקנות על המתרחש בתמונה או בסרט וידאו. המשמעות הספציפית של "הבנה" תלויה ביישום. דוגמאות אחדות למטרות אפשריות הן:

- הפרדה בין עצמים (לדוגמה, הפרדה בין אנשים בצילום של קהל)
- זיהוי עצמים (לדוגמה, זיהוי מבוקשים במצלמות אבטחה)
- מעקב אחר תנועת עצם (לדוגמה, מעקב אחר כדור שנזרק באוויר, מתוך מטרה לתפוס אותו)

בעיות הבנה כגון אלה הינן בעיות קשות, ורבות מהן עדיין נמצאות בשלבי מחקר. כדי להקל על פתרון הבעיות האלה, ניתן להגדיר מספר מטרות יסוד, מתוך תקווה שפתרון יהיה פשוט יותר, ויקדם את המחקר של מטרות-העל.

ניקח לדוגמה את הבעיה של מעקב אחר כדור שנזרק באוויר, למשל מתוך סרט וידאו של משחק כדורסל. חלק מהבעייתיות בהבנת תנועת הכדור נובעת מכך שהפְּרָמִים<sup>1</sup> בסרט הווידאו משתנים כתוצאה מגורמים רבים, ולא רק כתוצאה מתנועת הכדור: לדוגמה, עצמים נוספים מלבד הכדור עשויים לזוז במהלך הסרט; המצלמה עצמה עשויה לשנות את מיקומה או להסתובב; ותנאי התאורה של הכדור עשויים להשתנות כתוצאה משינוי המיקום שלו.

גורמים אלה מסבכים מאוד את בעיית המעקב, וכפי שנראה בהמשך, גם מובילים לכך שהבעיה היא ill-posed במונח המתמטי, כלומר, אין לה פתרון יחיד. העובדה שבני אדם מתייחסים לפעולות מעקב כאל פעולות פשוטות מעידה על כך שלעיבוד התמונה המתבצע במוח מתווספת כמות גדולה של "ידע מוקדם" בצורת אינטואיציה. אנו משתמשים בידע לגבי צורה וטקסטורה אפשריים של הכדור, מצבי תאורה נפוצים, ועוד. במקרים מסוימים, כגון אשליות אופטיות, ידע מוקדם זה פועל לרעתנו, וגורם להבנה מוטעית של הסביבה.

למרות שקשה לדעת בוודאות מה הדרך הטובה ביותר לעקוב אחרי תנועת עצם, ניתן להניח שאלגוריתמי מעקב יצטרכו להתחיל ממידע ברמה נמוכה, אשר מתאר שינויים בין פרמים עוקבים בסרט הווידאו. ספציפית, אנו מעוניינים במידע המקשר בין פיקסלים בתמונות עוקבות. מידע זה יכלול תיאורים כגון "בלוק פיקסלים A עבר ממקום X בפרם הראשון למקום Y בפרם השני". מידע כזה מכונה **זרימה אופטית** (optical flow), ועבודה זו תסקור גישות שונות לחישובו.

כאמור, חישוב הזרימה האופטית הינו שלב עיבוד נמוך בתהליך ההבנה של סרט וידאו. תיאור זרימה אופטית של סרט וידאו מותיר מקום לשאלות הבנה רבות: האם בלוק הפיקסלים המתואר הוא עצם שלם, חלק מעצם, או אוסף אקראי של פיקסלים? האם תנועתו היא תוצאה של

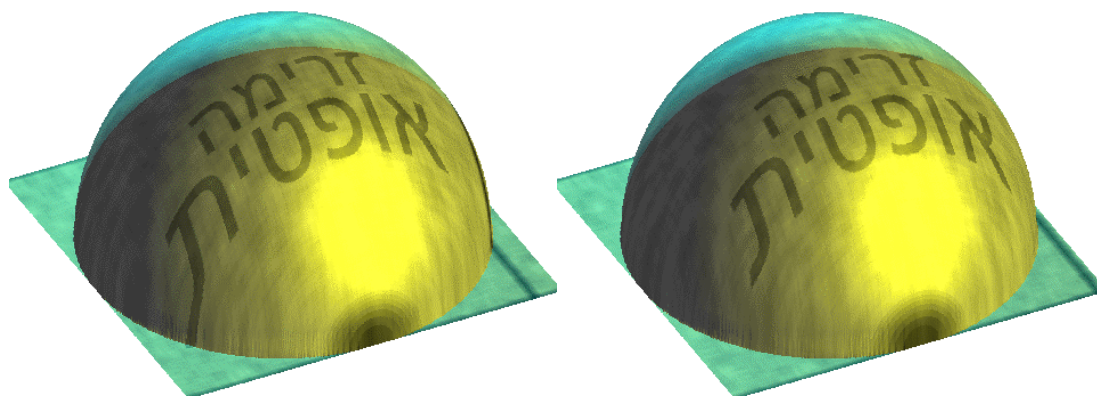
---

<sup>1</sup> ברצף תמונות אשר יוצר סרט וידאו, כל תמונה מכונה פְּרָם (frame).

תנועת העצם, תנועת המצלמה, או התאמה מקרית בין שני פרמים? על שאלות אלה יענו אלגוריתמים ברמה גבוהה יותר, ולא נדון בהן בעבודה זו.

## 2. זרימה אופטית קלאסית

בפרק זה נסקור את המשמעות הקלאסית של זרימה אופטית (Horn, 1986), אותה מרחיב נגדריפור במאמרו. מטרת הזרימה האופטית היא לזהות הבדלים בין שני פרמים (תמונות) עוקבים בסרט וידאו, ולתאר הבדלים אלה כתנועה של "כתמים" (גושי פיקסלים) ממקום למקום. לדוגמה, האיור הבא מציג שני פרמים מתוך סרט מסומלץ של כדור מסתובב<sup>2</sup>. מטרת אלגוריתם הזרימה הינה לגלות את ההתאמה בין פיקסלים בשני הפרמים.



איור 1: פרמים מתוך סרט וידאו

נסמן ב-  $E(x, y, t)$  את עצמת הפיקסל  $(x, y)$  בפרם המתקבל בזמן  $t$ . נסתכל כעת על שני פרמים עוקבים, ונניח כי הפרש הזמן ביניהם הוא  $\delta t$ . תנועה של כתמי צבע במהלך פרק הזמן  $\delta t$  ניתנת לתיאור כשדה דו-מימדי  $(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t})$  באופן הבא:

$$(1) \quad E(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t) = E(x, y, t)$$

חלקים שונים של הפרם עשויים לנוע במהירויות שונות, והתנועה עשויה להשתנות במהלך סרט הווידאו. במילים אחרות, השדה  $(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t})$  הוא פונקציה של הקואורדינטות  $x, y, t$ .

על ידי פיתוח טור טיילור מסדר ראשון של צד שמאל של (1), מתקבל:

$$(2) \quad E(x, y, t) + \frac{\partial E}{\partial x} \delta x + \frac{\partial E}{\partial y} \delta y + \frac{\partial E}{\partial t} \delta t + O(\delta^2) = E(x, y, t)$$

<sup>2</sup> בדוגמה זו נלקחו שני פרמים בעלי הפרש זמן גדול יחסית, כדי להדגיש את ההבדלים ביניהם. ברוב המקרים, ההבדלים בין פרמים עוקבים בסרט יהיו קטנים בהרבה.

כאשר  $O(\delta^2)$  מכיל איברים מסדר שני ומעלה. איברים אלה ניתנים להזנחה אם מרווח הזמן בין הפרמים נמוך דיו. במצב כזה מתקבל<sup>3</sup>

$$(3) \quad \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

נזכור כי  $\frac{\delta x}{\delta t}$  ו- $\frac{\delta y}{\delta t}$  הם שני הרכיבים של שדה הזרימה האופטית המבוקש. את הנגזרות החלקיות של  $E$  ניתן לשערך מתוך סרט הוידאו בשיטות סטנדרטיות, כגון אופרטור Sobel או אופרטור Robert (Jain, 1989).

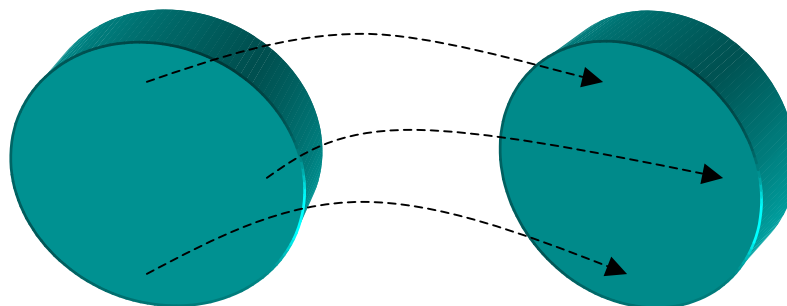
משוואה (3) אינה מספיקה לכשעצמה למציאת הזרימה האופטית  $(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t})$ . זאת, מכיוון שהמשוואה מגדירה אילוץ אחד עבור כל פיקסל, בעוד שהזרימה האופטית כוללת שני נעלמים לכל פיקסל. זו בעיה שמקורה בדו-משמעות אשר קיים בכל סרט וידאו, ונדון בה בהרחבה בפרק 4.

### 3. זרימה אופטית מורחבת

בפרק זה נתאר את הסתייגותיו של נגדריפור מגישת הזרימה האופטית הקלאסית, ואת הפתרון שהוא מציע במאמרו (Negahdaripour, 1998).

#### 3.1. מגבלות הגישה הקלאסית

בפרק 2 סקרנו בקצרה את צורת ההתמודדות המקובלת עם בעיית חישוב הזרימה האופטית: זרימה אופטית מתארת תנועת כתמי צבע ממקום למקום בין שני פרמים עוקבים. גישה זו מניחה, כי כתמי הצבע אינם משתנים, אלא רק זזים ממקום למקום. הנחה זו מתאימה, לדוגמה, במצב המתואר באיור 2. באיור זה ניתן לראות שני פרמים עוקבים מתוך סרט המציג סיבוב של דיסקה. במקרה זה קיימת התאמה מלאה והגיונית שמסבירה את השינוי בין הפרמים, באמצעות זרימה אופטית קלאסית. התאמה זו מסומנת באופן סכמטי באמצעות החיצים.



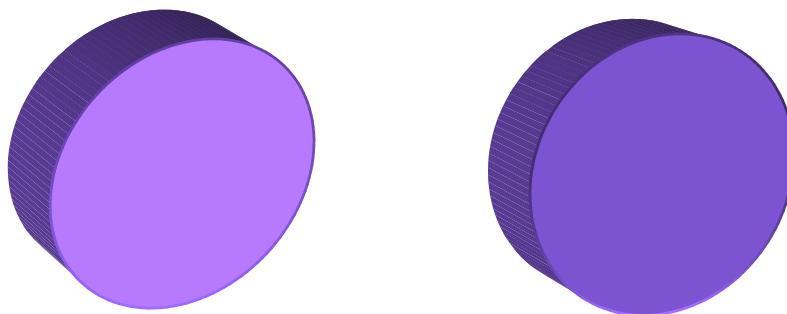
איור 2: פרמים עוקבים, שבהם כתמי צבע זזים ממקום למקום

<sup>3</sup> המשמעות האינטואיטיבית של תוצאה זו הינה שהנגזרת השלמה  $\frac{dE}{dt}$  שווה ל-0.



באופן כללי ניתן לומר, כי גישת הזרימה האופטית הקלאסית מסוגלת לתאר באופן מספק שינויים **גיאומטריים** בין תמונות. אלה שינויים הנובעים מתנועת העצם או מתנועת המצלמה, וגורמים להעברת כתמי צבע ממקום למקום.

ואולם, תופעות רבות אחרות אינן מתוארות באופן מספק על ידי זרימה אופטית קלאסית. איור 3 מציג דוגמה שבה דיסקה מסתובבת, בדומה לדיסקה של איור 2. ואולם במקרה זה, הסיבוב גורם לדיסקה לשנות את הזווית שלה ביחס למקור האור, וכתוצאה מכך ההארה של הדיסקה משתנה. במצב כזה גישת הזרימה האופטית הקלאסית אינה מסוגלת ליצור התאמה בין התמונות, מכיוון שאין "כתם" בעל בהירות קבועה בשתי התמונות.



**איור 3: פרמים עוקבים, שבהם כתמי צבע זזים ממקום למקום, ובנוסף משתנה הבהירות**

אנו רואים, אם כן, שהגישה הקלאסית לזרימה אופטית אינה מתמודדת היטב עם שינויים **פוטומטריים** בין תמונות, כלומר שינויים בתנאי התאורה. שינויים פוטומטריים עשויים להתעורר כתוצאה משינוי בתאורה עצמה (לדוגמה, שינוי צמצם המצלמה, או הזזת מקור האור); ואולם שינויים אלה יכולים להיות גם תוצאה של תנועה פשוטה של העצם, כפי שראינו בדוגמה לעיל. במילים אחרות, במהלך תנועת העצם, תנאי התאורה שלו עשויים להשתנות, וזרימה אופטית קלאסית אינה מסוגלת להתמודד עם שינויים כאלה.

### 3.2. זרימה אופטית מורחבת

נגדריפור מציע להרחיב את הזרימה האופטית כפי שהוגדרה ב-(1), כך שתוכל לתאר גם שינויים פוטומטריים (Negahdaripour, 1998). הוא מציע לעשות זאת על ידי הוספת רכיב  $\delta E$ , שיתאר את השינויים הפוטומטריים כשינוי בעוצמה  $E$ , בנוסף על הרכיבים הקיימים  $\delta x, \delta y$ , המתארים את תנועת הפיקסל ממקום למקום. משוואת הזרימה האופטית המורחבת תהיה

$$(4) \quad E(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t) = E(x, y, t) + \delta E$$

בעזרת פיתוח דומה לזה של פרק 2, מתקבלת הנוסחה הדיפרנציאלית

$$(5) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} - \frac{\delta E}{\delta t} = 0$$

כאשר הרכיבים  $\frac{\delta x}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta y}{\delta t}$  מתארים את הזרימה הגיאומטרית, ואילו הרכיב  $\frac{\delta E}{\delta t}$  מתאר את הזרימה הפוטומטרית.

### 3.3. מודל התנועה

ניתן להרחיב את גורם הזרימה הפוטומטרית  $\frac{\delta E}{\delta t}$  לאוסף של גורמים, אשר מתארים את הידוע לנו על השינויים הפוטומטריים האפשריים במערכת. תיאור כזה מכונה **מודל התנועה** ( Dynamic Image Model). מודל התנועה הפשוט ביותר הינו **מודל הבהירות הקבועה** ( Brightness Constancy Model, BCM). ע"פ מודל זה,  $\frac{\delta E}{\delta t} = 0$ ; אין שינויים פוטומטריים כלל, ומשוואת הזרימה המורחבת (5) מצטמצמת למשוואת הזרימה הקלאסית (3).

נגדריפור מציע את המודל הבא, אותו הוא מכנה **מודל התנועה המוכלל** ( Generalized Dynamic Image Model, GDIM):

$$(6) \quad \frac{\delta E}{\delta t} = \frac{\delta m}{\delta t} E + \frac{\delta c}{\delta t}$$

כאן הרחבנו את הגורם הפוטומטרי כדי לכלול שני סוגי תופעות. מתאר שינוי בעצמת ההארה, הפרופורציונלי למידת ההארה הנוכחית. רוב שינויי התאורה הינם מסוג זה. לדוגמה, משטח בעל נורמל קבוע אשר מסתובב ביחס למקור אור, משנה את מידת ההארה שלו ביחס ישר לאלבדו בכל נקודה. כיוון שההארה במצב ההתחלתי פרופורציונלית גם היא לאלבדו, הרי ששינוי ההארה בכל פיקסל פרופורציונלי להארה ההתחלתית. כאשר הנורמל משתנה באופן חלק, יש לצפות לכך שגם  $\frac{\delta m}{\delta t}$  ישתנה באופן חלק.

הגורם  $\frac{\delta c}{\delta t}$ , לעומת זאת, מתאר שינוי קבוע בעצמת ההארה. שינוי כזה מתרחש, לדוגמה, כאשר עצם יוצא מאיזור מוצל, וההארה עליו גדלה מ-0 לערך קבוע כלשהו. דוגמה אחרת לשינוי כזה היא הוספת מקור אור למערכת.

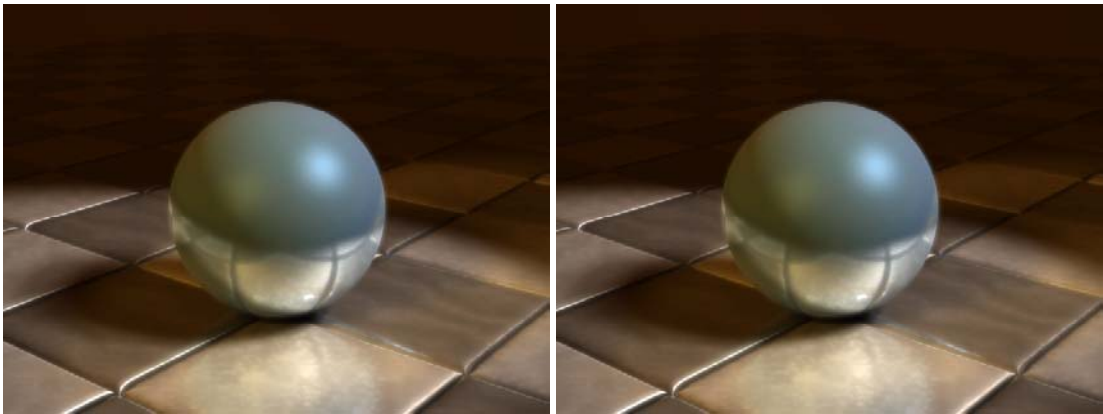
כפי שניתן להתרשם מהדוגמאות האלה, מודל התנועה המוכלל הוא מודל גנרי, אשר יכול לתאר מספר רב של תופעות פוטומטריות. לפיכך אין זה מפתיע שמספר מודלים המוכרים בספרות הינם מקרים פרטיים של מודל התנועה המוכלל. כך, לדוגמה, עצמים בעלי החזרה למבטרתית, ספקולרית, או שילוב של שניהם, ניתנים לתיאור מדויק בעזרת ה-GDIM.

במאמרו של נגדריפור מופיעות דוגמאות נוספות של מודלים מוכרים המתאימים לתיאור בעזרת ה-GDIM. נראה לי, שהתאמה זו אינה מצביעה דווקא על משמעות אוניברסלית של ה-GDIM, אלא מראָה שזהו מודל אשר מניח מעט מאוד על המתרחש במערכת, וכתוצאה מכך מתאים לתיאור תופעות רבות ושונות.

## 4. בעיית המפתח

כפי שהוסבר בפרק 2, משוואה (3) אינה מספיקה לכשעצמה למציאת הזרימה האופטית  $(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t})$ . זאת, מכיוון שהמשוואה מגדירה אילוץ אחד עבור כל פיקסל, בעוד שהזרימה האופטית כוללת שני נעלמים לכל פיקסל. זו בעיה שמקורה בדו-משמעות אשר קיים בכל רצף תמונות, ונהוג לכנותה **בעיית המפתח** (Aperture Problem) (Horn, 1986). בעיה זו מתגברת כאשר מוסיפים למשוואת הזרימה האופטית את הגורם הפוטומטרי  $\frac{\delta E}{\delta t}$ , שכן מספר הנעלמים לפיקסל גדל.

כדי להבין את הבעיה באופן אינטואיטיבי, נתבונן בשני הפרמים הבאים (איור 4). מכיוון שאין כל הבדל בין הפרמים, אדם סביר יניח כי אין בסרט תנועה (כלומר: הזרימה האופטית היא 0). ואולם, ישנן דרכים אחרות להסביר את המתרחש בין שני פרמים אלה. לדוגמה, ניתן לנחש כי הכדור מסתובב סביב עצמו. במהלך הסיבוב נעים כתמי פיקסלים משמאל לימין (שינוי גיאומטרי), ובמקביל משתנה ההארה של הפיקסלים (שינוי פוטומטרי) באופן המקוז בדיוק את השינויים הגיאומטריים, כך שהשינוי הכולל בתמונה הוא 0.



איור 4: שני פרמים מתוך סרט

ברור, אם כן, שקיימת דו-משמעות אשר נובעת מתופעה פיסיקלית אמיתית: לא כל הידע הנחוץ לנו לצורך הבנת סרט, נמצא בתוך הסרט עצמו. בני אדם משתמשים בידע מוקדם ובאינטואיציה כדי לבחור באפשרות הנכונה לתיאור הזרימה האופטית. לדוגמה, אותו אדם הצופה בסרט יכול להניח כי הכדור אינו מסתובב, אך הנחה זו תשתנה אם בתחילת הסרט הוא ראה יד מחזיקה את הכדור ומסובבת אותו.

כאשר מנסים למצוא את הזרימה האופטית בעזרת מחשב, לא נוכל לקחת בחשבון שיקולים מורכבים כאלה. עלינו למצוא כלל פשוט שיפתור את מצב ה-ill-conditioning של בעיית המפתח. נהוג לבחור כלל רציפות או חלקות לצורך זה: מניחים כי הזרימה האופטית אינה נוטה להשתנות באופן פתאומי במהלך התמונה. זו הנחה הגיונית, כי ברוב המקרים, סרט מתאר עצמים אשר נעים בצורה קשיחה פחות או יותר, ואז הזרימה האופטית שלהם אחידה בקירוב. מספר דרכים ליישום דרישת החלקות כאילוץ מתמטי מתוארות בסעיף 5.1.

## 5. שיטות עבודה

בפרק זה נתאר באופן מפורט יותר את האלגוריתם המדויק בו נעשה שימוש בעבודה זו, לצורך חישוב הזרימה האופטית. בפרק הבא יוצגו תוצאות בדיקת האלגוריתם על תמונות מסומלצות.

כזכור, מודל ה-GDIM לזרימה אופטית מגדיר את האילוך הבא על משוואת הזרימה האופטית:

$$(7) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta t} - \left( E \frac{\delta m}{\delta t} + \frac{\delta c}{\delta t} \right) = 0$$

בביטוי זה, הנגזרות החלקיות של  $E$  ניתנות לשיערוך מתוך התמונה, ואילו פרמטרי הזרימה האופטית  $\frac{\delta x}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta y}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta m}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta c}{\delta t}$  הינם נעלמים. כפי שהוסבר בפרק 4, במצב כזה ישנה משוואה אחת בעלת ארבעה נעלמים, עבור כל פיקסל. נדרשת לפיכך הנחה נוספת כדי לפתור את המשוואה. מקובל להניח סוג מסוים של דרישת רציפות על הנעלמים, כדי למנוע מרעשים להוביל לתוצאות חריגות.

### 5.1. אילוך הרציפות

קיימות מספר גישות לפתרון הבעיה. גישה אחת מגדירה אופרטור אשר מקבל ערך נמוך כאשר הזרימה האופטית משתנה באופן חלק (Horn & Schunk, 1981; Horn, 1986). דוגמה לאופרטור כזה הינה<sup>4</sup>

$$(8) \quad (\nabla \frac{\delta x}{\delta t}) \cdot (\nabla \frac{\delta x}{\delta t}) + (\nabla \frac{\delta y}{\delta t}) \cdot (\nabla \frac{\delta y}{\delta t}) + (\nabla \frac{\delta m}{\delta t}) \cdot (\nabla \frac{\delta m}{\delta t}) + (\nabla \frac{\delta c}{\delta t}) \cdot (\nabla \frac{\delta c}{\delta t})$$

כאשר  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y}$  הינו אופרטור הגרדיאנט, והמכפלה המבוצעת הינה מכפלה סקלרית. האופרטור המתואר במשוואה (8) מקבל ערך של 0 כאשר הזרימה האופטית קבועה, וערכו גדל ככל שמגדילים את הזרימה האופטית.

גישה זו לוקה בכמה חסרונות. ראשית, ברוב המקרים, הפתרון האופטימלי רציף למקוטעין, ולא רציף בכל נקודה. לדוגמה, הזרימה האופטית עשויה להשתנות בפתאומיות באיזור המעבר בין שני עצמים שונים. משוואה (8) עשויה לתת ציון התאמה גרוע במצבים כאלה. שנית, שיערוך הגרדיאנט מתוך נתונים בדידים הינו בעייתי, ומגביר את הרעש במערכת.

דרישת חלקות אחרת מבוססת על הנחת הרציפות למקוטעין. לפי גישה זו, מחלקים את התמונה לבלוקים, ומניחים כי פרמטרי הזרימה האופטית בתוך כל בלוק קבועים (Kearney et al., 1987). צורת עבודה זו אינה מנסה למצוא את נקודות אי-הרציפות, אך מאפשרת להם להוצר באופן טבעי באיזורים שבין הבלוקים. שיטה זו גורמת לכך שהמשוואה ה-under-determined (7)

הופכת למערכת משוואות over-determined, שכן על (7) להתקיים (עם אותם ערכי  $\frac{\delta x}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta y}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta m}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta c}{\delta t}$ ) עבור כמות גדולה של פיקסלים. על ידי שימוש ב-SVD, ניתן למצוא ביעילות את הפתרון האופטימלי למערכת זו, במובן שגיאה ריבועית מינימלית (השיטה המדויקת לעשות זאת מתוארת בנספח ב').

בוואריאציה על שיטה זו, (Negahdaripour 1998) מגדיר גם הוא בלוק פיקסלים שבו הזרימה האופטית תהיה קבועה. ואולם במקום למצוא את פרמטרי הזרימה האופטית שיתנו שגיאה ריבועית ממוצעת בבלוק זה, Negahdaripour פותר מערכת של ארבע משוואות, שהן צירופים לינאריים שונים של (7) עבור הפיקסלים בבלוק. בצורה זו ניתן להמנע מחישוב SVD של מטריצות גדולות, שכן נדרש לפתור מערכת משוואות לינארית בעלת ארבע משוואות בלבד, בלי קשר לגודל הבלוק.

בעבודה זו בחרנו לוותר על תוספת היעילות החישובית שמציע Negahdaripour, ולהשתמש בשיטת ה-SVD של Kearney et al. השוואה מסודרת בין התוצאות המתקבלות עם אילוצי רציפות שונים נותרת נושא למחקר המשך (ראה סעיף 8.2).

## 5.2. גודל הבלוק

אילוץ הרציפות שנבחר גורס, כי פרמטרי הזרימה האופטית יהיו קבועים בבלוקים מסוימים בתמונה. השאלה המתבקשת היא, מהו גודל הבלוק האופטימלי לחישוב הזרימה האופטית?

שימוש בבלוקים גדולים מאוד בוודאי אינו רצוי, שכן הדבר יגרום לאילוץ רציפות חזק מדי, וייצור תלויות בין חלקים בלתי קשורים של התמונה. מצד שני, ברור שהבלוק חייב להכיל לפחות ארבעה פיקסלים, כיוון שישנם ארבעה נעלמים במשוואה. ישנם יתרונות גם לבלוקים בעלי יותר מ-4 פיקסלים. ראשית, שימוש במספר פיקסלים גדול יותר יאפשר להתגבר על רעשים במידע. שנית, ייתכנו מקרים שבהם תהיה תלות לינארית בין הפיקסלים בבלוק (לדוגמה, באיזורים חלקים מאוד ייתכן שכל הפיקסלים בבלוק יהיו זהים). במצבים כאלה לא יהיה ניתן לפתור את המשוואות באופן חד-ערכי, גם אם מספר הפיקסלים גדול ממספר הנעלמים. הגדלת הבלוק מגדילה את הסבירות לכך, שהפתרון יהיה well-conditioned.

במאמר של (Negahdaripour 1998) נעשה שימוש בבלוקים בגודל  $9 \times 9$  פיקסלים. ואולם, ברור כי הבחירה מושפעת מפרמטרים שונים של הסרט בו נעשה שימוש. לדוגמה, אם ניקח סרט זהה ברזולוציה כפולה, גודל בלוק כפול ייצור אילוץ רציפות זהה ביחידות מרחק פיסיקליות. במאמר אין התייחסות לנקודה זו. לפיכך, בסימולציה זו נבדקו מספר גדלים שונים, ונבחר לבסוף בלוק של  $11 \times 11$  כמתאים ביותר לתמונות השונות שנבדקו. בסעיף 8.1 מוצע פתרון כללי יותר לבעיה זו.

---

<sup>4</sup> גישה זו הוצגה במקור עבור זרימה אופטית קלאסית. ההצגה כאן הינה ואריאציה שנועדה להתאים למקרה של זרימה אופטית מורחבת.

### 5.3. אופרטור הגזירה

העובדה שנעשה שימוש במנגנון אשר ממזער את השגיאה הריבועית גורמת למיצוע ההשפעה של הפיקסלים השונים בבלוק. לכן, לא נוצר צורך באופרטור גזירה בעל תמך רחב. הנגזרות החלקיות חושבו, לפיכך, לפי השערוך הבא:

$$(9) \quad \begin{aligned} \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{(x,y,t)} &\cong \frac{E(x+1, y, t) - E(x-1, y, t)}{2} \\ \left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_{(x,y,t)} &\cong \frac{E(x, y+1, t) - E(x, y-1, t)}{2} \\ \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{(x,y,t)} &\cong E(x, y, t+1) - E(x, y, t) \end{aligned}$$

השימוש באופרטור צר יותר עבור הנגזרת לפי  $t$  נעשה כדי לאפשר לפתרון לפעול על שני פרמים עוקבים בסרט הוידאו, ובגלל העובדה שהשינויים בתחום הזמן מהירים יותר, בדרך כלל, מהשינויים בתחום המקום.

### 6. תוצאות

בעבודה זו נבדקה ההגדרה המורחבת של זרימה אופטית בתנאי סימולציה. ראשית יוצרו בעזרת מחשב מספר פרמים מתוך "סרטים" המציגים צורות גיאומטריות פשוטות בתנועה במרחב (אופן יצירת תמונות אלה מתואר בנספח א'). לאחר מכן נבדק האלגוריתם של Negahdaripour (1998) על פרמים אלה, תוך שימוש במודל GDIM שתואר בסעיף 3.3. בפרק זה נתאר את התוצאות של סימולציה זו.

בנוסף לפרמים עליהם בוצע החישוב, יוצגו תוצאות חישוב הזרימה האופטית, באופן הבא: הגורמים הגיאומטריים  $(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t})$  מוצגים בתרשים quiver, שבו בכל נקודה מוצגת הזרימה האופטית היוצאת מנקודה זו, בעזרת חץ המציג את גודל וכיוון השינוי. הגורמים הפוטומטריים  $\frac{\delta c}{\delta t}, \frac{\delta m}{\delta t}$  מוצגים בשני תרשימים נפרדים, שבהם סקאלת צבעים (איור 5) מציגה את הערכים בכל נקודה. בכל התרשימים, במקרים שבהם לא היה ניתן לפתור את משוואת הזרימה האופטית באופן יחיד, נרשם ערך 0.

-3

0

+3

#### איור 5: סקאלה עבור תרשימי זרימה פוטומטרית

האלגוריתם נבדק על פרמים מסרט (מסומלץ), המציג כדור מסתובב. כדי לאפשר לאלגוריתם המעקב לזהות את השינויים, הכדור שבתמונה מכיל טקסטורה אקראית (בתוספת כיתוב).

על הפרמים המכילים כדור מסתובב בוצעו מספר ואריאציות. ראשית, נבדקה התמודדות האלגוריתם עם מצב פשוט, שבו פונקציית החזרה היא למברטית מושלמת (איור 6). לאחר מכן נבדק האלגוריתם על סרט זהה עם פונקציית החזרה מסוג Phong, שהוא שילוב של החזרה למברטית והחזרה ספקולרית (איור 7). לבסוף האלגוריתם הופעל על מצב שבו התאורה השתנתה משמעותית בין שני הפרמים (איור 8).

כבדיקה נוספת, הופעל האלגוריתם גם על "סרט" סינטטי שבו ארבע אותיות אשר נעות בכיוונים שונים (איור 9).

Image1

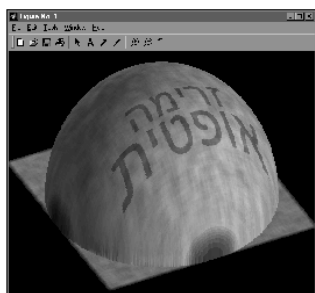
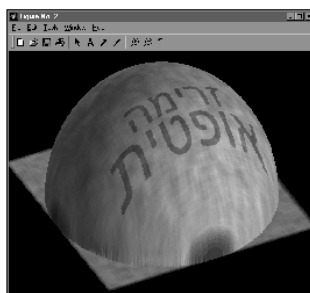
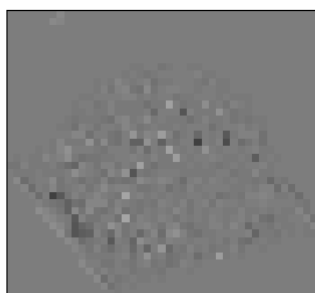


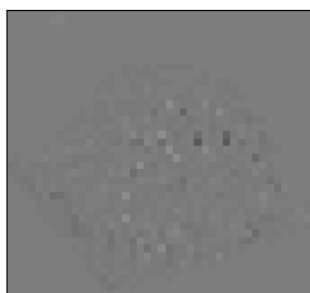
Image2



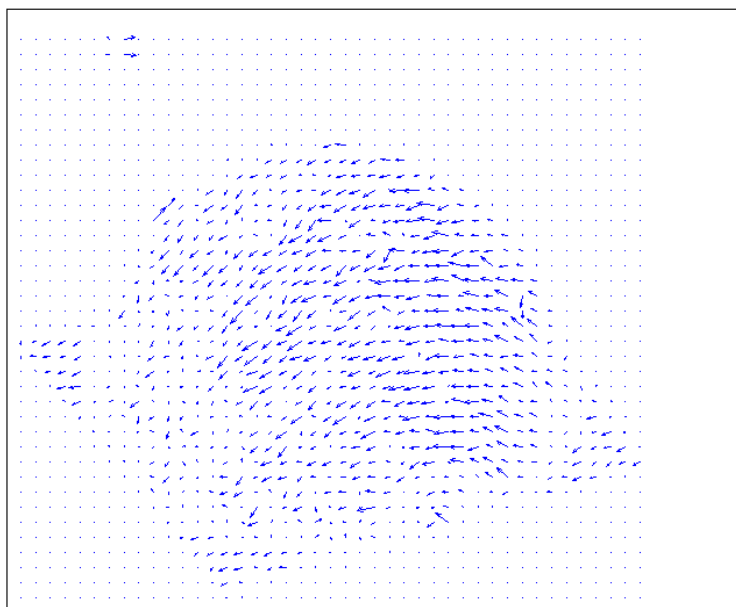
$\delta m / \delta t$



$\delta c / \delta t$



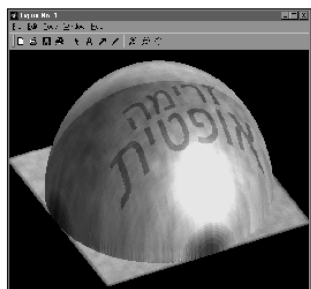
$(\delta x, \delta y)$  quiver plot



איור 6: כדור למברטי מסתובב



Image1



$\delta m/\delta t$

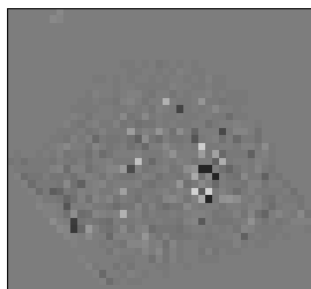
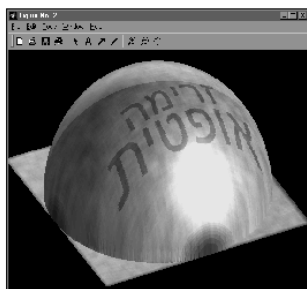
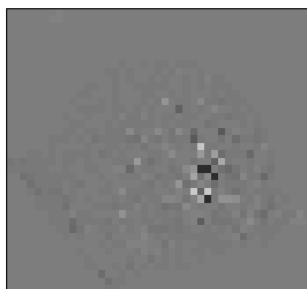


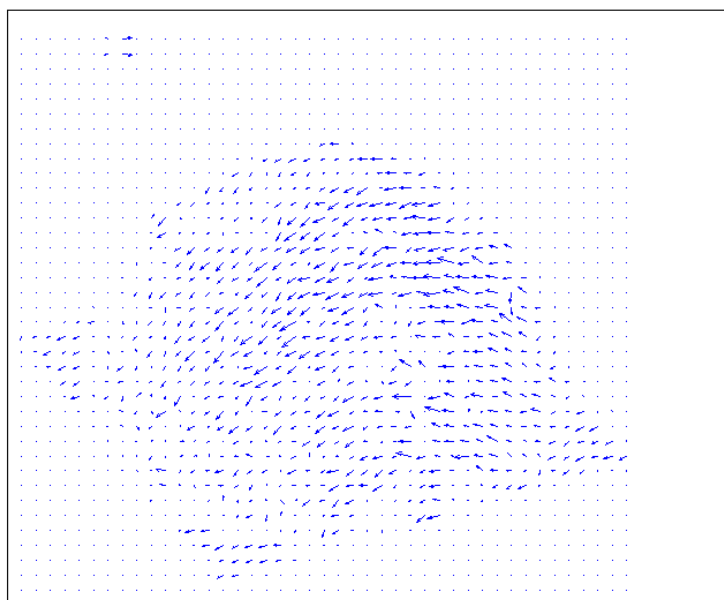
Image2



$\delta c/\delta t$



$(\delta x, \delta y)$  quiver plot



**איור 7: כדור מסתובב עם החזרת עם Phong**

Image1

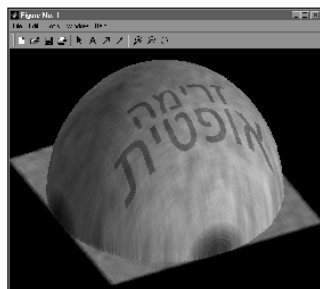
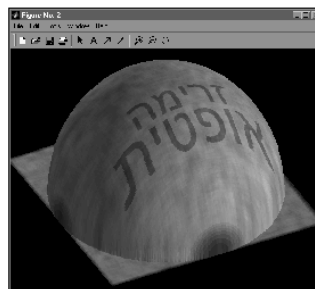
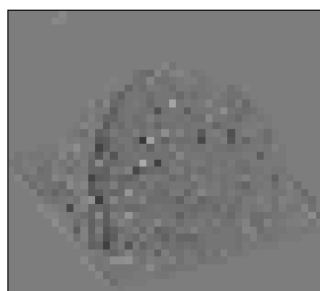


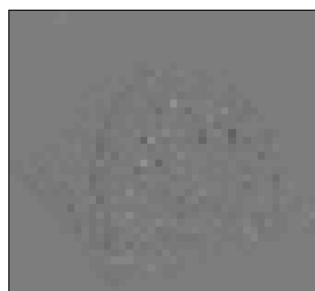
Image2



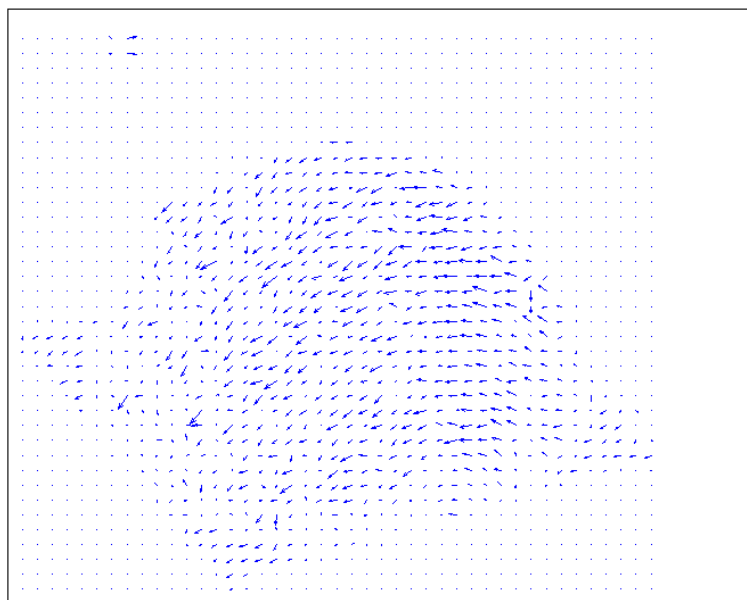
$\delta m / \delta t$



$\delta c / \delta t$



$(\delta x, \delta y)$  quiver plot



איור 8: כדור מסתובב עם שינוי במצב התאורה

Image1

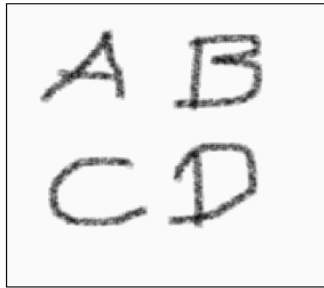
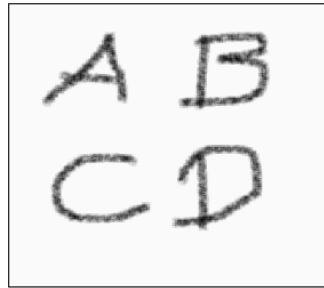
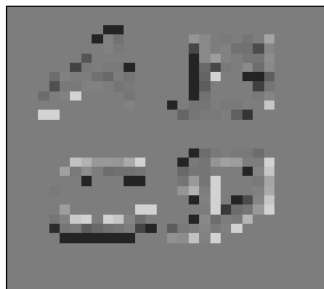


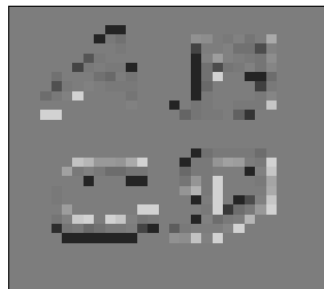
Image2



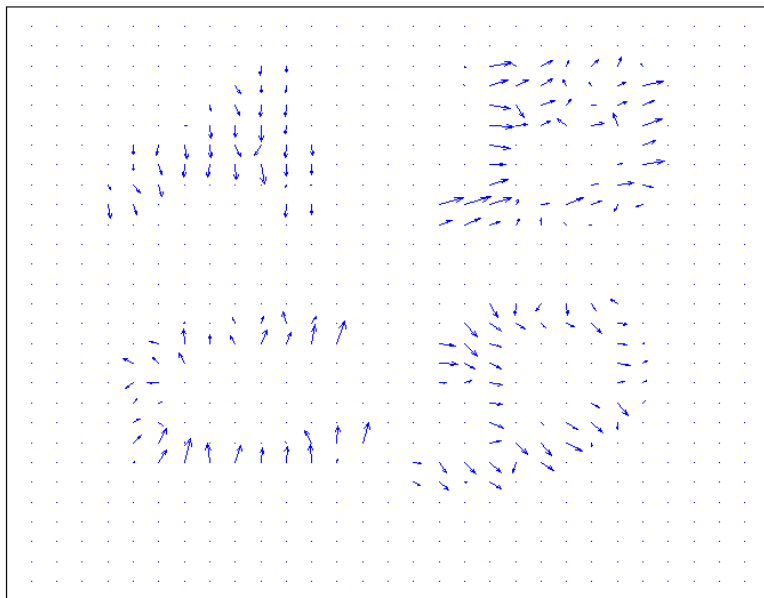
$\delta m / \delta t$



$\delta c / \delta t$



$(\delta x, \delta y)$  quiver plot



איור 9: אותיות בתנועה

## 7. ניתוח

בפרק 6 הוצגו מספר תוצאות של חישובי זרימה אופטית. בפרק זה ננסה להסיק מתוצאות אלה מסקנות לגבי אלגוריתם הזרימה האופטית המורחבת.

באופן כללי נראה, שהאלגוריתם מבצע עקיבה נכונה אחר עצמים הנמצאים בתנועה. איור 6, לדוגמה, מציג תרשים quiver אשר עוקב באופן נכון, בדרך כלל, אחרי התנועה המעגלית של הכדור. במספר מקרים "קשים", הזיהוי אינו מבוצע באופן נכון.

דוגמה למצב שבו האלגוריתם נכשל מופיעה בחלק השמאלי ובחלק האחורי של הכדור באיור 6. במקרה זה, ההיטל גורם לכך שתנועת הפיקסלים מהירה במיוחד. במצב זה האלגוריתם אינו מצליח לזהות את התנועה, ותרשים ה-quiver מציג תוצאות שגויות. ההסבר לבעיה זו נעוץ בכך, שהאלגוריתם מזהה תנועה על סמך הנגזרות החלקיות  $\frac{\partial E}{\partial x}$  ו-  $\frac{\partial E}{\partial y}$ . נגזרות אלה משוערכות מתוך נתונים בדידים, בעזרת פונקציה בעלת תמך סופי, ובמקרה שלנו – תמך של שלושה פיקסלים (ראה סעיף 5.3). לפיכך ניתן לשערך באופן תקין את התנועה רק כאשר בין שני הפרמים חלה תנועה של לכל היותר שלושה פיקסלים. דרך אפשרית לפתרון בעיה זו תוצג בפרק הבא.

מגבלה נוספת של האלגוריתם בולטת מאוד במרכז איור 7. בתמונות שבאיור זה, פונקציית ההחזרה של הכדור מכילה רכיב ספקולרי, אשר גורם לכך שמרכז התמונה מכיל פיקסלים רוויים באיזור גדול יחסית. פיקסלים אלה אינם מכילים טקסטורה, ולכן האלגוריתם אינו מסוגל לזהות כל תנועה באיזור הספקולרי. כתוצאה מכך מערכת המשוואות (7) היא ill-conditioned, והדבר מוצג בתרשים ה-quiver כחיצים באורך 0. תופעה דומה מתרחשת גם כאשר מנסים לחשב זרימה אופטית של עצמים חלקים מאוד, כדוגמת העצם באיור 4. זו בדיוק תופעת הדו-משמעות שנידונה בפרק 4: כאשר הכדור חלק מדי, לא ניתן להבדיל בין כדור ניח לבין כדור מסתובב.

לעומת מגבלות אלה, איור 8 מציג יכולות מרשימות של אלגוריתם הזרימה האופטית המורחבת. בשני הפרמים של איור זה ישנו הבדל משמעותי בהארה. ההבדל הינו משמעותי במידה כזו, שכמעט אין פיקסלים בעלי ערכים זהים בשתי התמונות. למרות זאת, אלגוריתם הזרימה מצליח לזהות באופן תקין את הזרימה, וכן לדווח באופן נכון על הירידה בעוצמה. הירידה בעוצמה הינה משמעותית פחות באיזור השמאלי הקיצוני של הכדור, שמואר מלכתחילה רק באור אמביינטי, כפי שניתן לראות מתרשים  $\frac{\delta m}{\delta t}$ .

אם איור 8 מציג תוצאות בזכות הזרימה האופטית המורחבת, הרי שאיור 9 מציג תוצאות טובות הרבה פחות. באיור זה מוצגות ארבע אותיות, כאשר כל אות נעה פיקסל אחד לכיוון אחר. לכאורה, זהו מצב אידאלי לעקיבה: ישנם בלוקים מוגדרים אשר נעים ממקום למקום והתנועה אינה גדולה מדי. ואכן, הרכיבים הגיאומטריים של הזרימה האופטית מציגים באופן נכון את כיווני התנועה של האותיות. הרכיבים הפוטומטריים, לעומת זאת, מציגים תוצאות לא נכונות, לפיהן חלים בתמונה שינויים פוטומטריים קיצוניים.

דוגמה זו מובילה אותנו למסקנה חשובה לגבי ההפרדה בין אפקטים פוטומטריים וגיאומטריים. לפי נגדריפור, שינויים גיאומטריים מבוטאים באופן בלעדי בעזרת הרכיבים  $\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t}$ , ואילו שינויים פוטומטריים מבוטאים בלעדית בעזרת  $\frac{\delta m}{\delta t}, \frac{\delta c}{\delta t}$ . ניתן לשערך את השינויים המתרחשים בתמונה בעזרת ארבעה גורמים אלה, ולפי נגדריפור – השערוך בעל השגיאה המינימלית ייתן את ההפרדה המבוקשת בין הגורמים הגיאומטריים לבין הגורמים הפוטומטריים. אך מאיור 9 ניתן לראות, שאין זה תמיד המצב. לעיתים, השערוך האופטימלי במונח MMSE נותן פתרון שיש בו שילוב של הגורמים ה"גיאומטריים"  $\frac{\delta m}{\delta t}, \frac{\delta c}{\delta t}$ , גם כאשר בסרט עצמו ישנם שינויים גיאומטריים בלבד. כלומר, ההקבלה בין שינוי פוטומטרי לבין  $\frac{\delta m}{\delta t}, \frac{\delta c}{\delta t}$  אינה תמיד נכונה. את הבעייתיות בזיהוי הפוטומטרי ניתן לראות גם בתוצאות האחרות: לא תמיד מתקבלים ערכים הגיוניים (או אפילו רציפים) בחישובי  $\frac{\delta m}{\delta t}, \frac{\delta c}{\delta t}$ .

לסיכום, ניתן לראות כי באופן כללי, האלגוריתמים מבצעים עקיבה נכונה של עצמים בתנועה, גם כאשר מצבי התאורה משתנים. עם זאת, במצבים מסוימים ההפרדה בין גורמים פוטומטריים לבין גורמים גיאומטריים אינה מבוצעת באופן תקין.

## 8. נושאים להמשך מחקר

### 8.1. יישום זרימה אופטית בעזרת פירמידה גאוסיאנית

במהלך העבודה הוצגו שתי בעיות טכניות הקשורות לאלגוריתם המוצע. בסעיף 5.2 ראינו כי יש לבחור את גודל הבלוק באופן שרירותי, בעזרת ידע מוקדם על רזולוציית הצילום ומידת החלקות של התמונה. בפרק 7 נטען כי האלגוריתם כפי שהוא מומש בעבודה זו אינו מסוגל לזהות תנועה של יותר מ-3 פיקסלים בין פרמים עוקבים. ייתכן שניתן לפתור את שתי הבעיות האלה בעזרת אלגוריתם פירמידלי (Burt & Adelson, 1983). בסעיף זה נתאר בקווים כלליים מימוש אפשרי של אלגוריתם כזה.

כפי שהוסבר בפרק 7, המרחק המקסימלי בו ניתן לזהות תנועה מוגבל לתמך האופרטור המשמש לשערוך הנגזרות החלקיות. דרך אחת בעזרתה ניתן להתגבר על בעיה זו הינה בעזרת הפעלת האלגוריתם על פירמידה גאוסיאנית, שבו הזרימה האופטית משוערכת מספר פעמים, ברזולוציות תמונה שונות. על ידי שערוך ראשוני ברזולוציה נמוכה מאוד, ומעבר הדרגתי לרזולוציה מקסימלית, ייתכן שניתן לקבל שערוך מדויק יותר גם כאשר חלה תנועה של מספר גדול של פיקסלים.

מימוש כזה עשוי גם לפתור את בעיית גודל הבלוק, שכן אם ייעשה שימוש במספר קבוע של פיקסלים בכל רמה בפירמידה, ניתן יהיה להשיג את היתרונות של בלוק גדול ברזולוציות גבוהות, יחד עם היתרונות של בלוק קטן בתיקונים המבוצעים ברזולוציות נמוכות.

## 8.2. בחירת אילוץ הרציפות

אילוץ הרציפות מאפשר להפוך את את הבעיה ה-under-determined של משוואה (7) לבעיית אופטימיזציה פתירה. ללא אילוץ הרציפות, קיימות דרגות חופש רבות בבחירת הפתרונות של משוואה (7). לפיכך ייתכן שלבחירת אילוץ הרציפות תהיה השפעה ניכרת על איכות תוצאות החישוב.

בסעיף 5.1 תוארו שתי גישות עיקריות לבחירת אילוץ הרציפות. הגישה של Horn & Schunk (1981) הסתמכה על אילוץ חלקות כללי של שדה הזרימה האופטית, בעוד שהגישה של Kearney et al. (1987) הסתמכה על אילוץ ערך קבוע לזרימה האופטית בבלוקים בעלי גודל קבוע. ניתן אולי לשלב בין הגישות האלה, בעזרת אלגוריתם זיהוי שפות, כפי שמציע גם Negahdaripour (1998). ע"פ שילוב זה, יזוהו גופים בעלי שפות חדות בתמונה, וכל עצם כזה ייחשב "בלוק" עליו יופעל אילוץ דומה לזה של Kearney et al. בצורה כזו ניתן יהיה להמנע מהקטנת הרזולוציה הנוצרת מבחירה שרירותית של בלוקים, ויחד עם זאת לאפשר שינויים חדים בזרימה האופטית בנקודות המעבר בין עצמים שונים.

## 9. סיכום

בעבודה זו סוכם ונבדק מאמרו של S. Negahdaripour (1998), בו הוא מציע הרחבה של ההגדרה הקלאסית של זרימה אופטית. בעוד שההגדרה הקלאסית (Horn, 1986) מאפשרת לזהות תנועת כתמי צבע ממקום למקום (שינויים גיאומטריים), מנסה נגדריפור להרחיב את השימוש בזרימה אופטית למצבים כללים יותר, בהם חלים שינויים פוטומטריים בנוסף לתנועת הכתמים; כלומר, האופן שבו מוארים הפיקסלים משתנה במהלך התנועה.

נראה שההפרדה החדה שמבצע נגדריפור בין גורמים גיאומטריים לבין גורמים פוטומטריים אינה יוצרת תמיד את התוצאות הרצויות, ובמספר מקרים האלגוריתם נותן פירוש פוטומטרי לשינויים שהינם גיאומטריים במובהק. עם זאת, לאלגוריתם החדש ישנם ביצועים מרשימים במספר תחומים. הוא מסוגל לעקוב באופן נכון אחרי תנועה, גם בתנאים בהם זרימה אופטית קלאסית אינה מסוגלת לזהות תנועה כלל, למשל במצבים שבהם התאורה משתנה משמעותית בין פרמים עוקבים.

הוצגו מספר הצעות להמשך המחקר, אשר עשויות לפתור חלק מהבעיות שעלו בבדיקת העבודה: הוצע אלגוריתם פירמידלי שיאפשר לזהות תנועות חדות, איתן האלגוריתם הנוכחי מתקשה. כמו כן, הוצע לבחון אלטרנטיבות קיימות לאילוץ הרציפות, שיכולה להיות להן השפעה מכרעת על תוצאות החישוב.

### א. יצירת תמונות תלת-מימדיות ב-Matlab

כלי הויזואליזציה של Matlab מאפשרים ליצור היטלים פרספקטיביים ואורתוגרפיים של תמונות תלת-מימדיות, ולשלוט באופן מלא על זווית הראייה ותנאי התאורה. בנספח זה נתאר בקצרה את האופן שבו יוצרו תמונות הפרספקטיבה ששימשו לבדיקת האלגוריתם.

ניתן להציג היטל פרספקטיבי של משטח תלת-מימדי בעזרת פקודת `surface`. הפקודה מקבלת כקלט מטריצה המכילה את הגובה בכל נקודה, ומטריצה נוספת המכילה את האלבדו בכל נקודה. פרמטרים נוספים של הפונקציה מגדירים את תכונות ההחזרה של המשטח, ע"פ מודלים שונים (במקרה שלנו נעשה שימוש במודל Phong).

זווית הצילום מוגדרת ע"י הפקודה `axes`. בעזרת פקודה זו ניתן להגדיר את מיקום המצלמה, כיוון ההתבוננות שלה, ורוחב זווית הצילום.

תנאי התאורה מוגדרים על ידי הוספת אובייקטי תאורה, בעזרת הפקודה `light`. ניתן להגדיר מספר אובייקטי תאורה, ולכל אחד לקבוע מיקום וצבע.

לאחר יצירת התמונה, יש צורך להפוך אותה למטריצה דו-מימדית שתכיל את הצבעים בכל פיקסל. ניתן לעשות זאת על ידי שמירת התמונה לקובץ TIFF (בעזרת הפקודה `print`), ולאחר מכן פתיחת הקובץ שנשמר (בעזרת הפקודה `imread`).

תוכנית Matlab אשר יוצרת את אחת התמונות בהן נעשה שימוש בעבודה זו, מופיעה בהמשך. מפאת חוסר מקום לא הוכנסו תוכניות ליצירת כל התמונות, ואולם השינויים בין התוכניות הינם קטנים. התוכנית מבוססת בחלקה על קוד Matlab המופיע בקובץ `logo.m`, שהינו חלק מתוכניות ההדגמה של חבילת Matlab.

```
xc = 10; yc = 10; zc = 20; r = 20;
step = .1;
[x,y]=meshgrid((xc-r):step:(xc+r), (yc-r):step:(yc+r));
z = sqrt(r^2-(x-xc).^2-(y-yc).^2) .* ((x-xc).^2+(y-yc).^2 <= .999*r^2);
n = rand(size(z))*2000;
n = conv2(n,ones(15,15)/225,'same');
c = double(imread('zrima.bmp'))' + n;

figure('Color',[0 0 0]);
axes('CameraPosition', [-193.4013 -400.1546 300],...
     'CameraTarget',[xc yc 4], 'CameraUpVector',[0 0 1], ...
     'CameraViewAngle',4, 'DataAspectRatio', [1 1 .9],...
     'Position',[0 0 1 1], 'Visible','off', ...
     'XLim',[1 51], 'YLim',[1 51], 'ZLim',[-13 40]);
colormap gray;
s = surface(x,y,z,c, ...
           'EdgeColor','none', 'FaceLighting','phong', ...
           'AmbientStrength',0.3, 'DiffuseStrength',0.6, ...
           'Clipping','off', 'BackFaceLighting','lit', ...
           'SpecularStrength',0, 'SpecularColorReflectance',1, ...
           'SpecularExponent',5);
l1 = light('Position',[40 100 20], ...
          'Style','local', 'Color',[0 0.7 0.7]);
l2 = light('Position',[.5 -1 .4], 'Color',[1 1 0]);
```

## ב. חישוב זרימה אופטית בעזרת SVD

אנו מעוניינים למצוא את הזרימה האופטית עבור בלוק נתון בעל  $N$  פיקסלים, מתוך הנחה כי הזרימה האופטית קבועה בקירוב עבור בלוק זה. נסמן ב-  $E(1), \dots, E(N)$  את הפיקסלים בבלוק זה. אנו שואפים שמשוואה (7) תתקיים עבור כל הפיקסלים בבלוק, אך למעשה המשוואה תתקיים עם שגיאה  $\varepsilon_i$  מסוימת עבור כל אחד מהפיקסלים  $i = 1, \dots, N$ :

$$(10) \quad \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{(i)} + \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{(i)} \delta x + \left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_{(i)} \delta y - E(i) \delta m - \delta c = \varepsilon_i$$

אנו מעוניינים למצוא את הפרמטרים שיובילו לשגיאה ריבועית  $\sum_{i=1}^N |\varepsilon_i|^2$  מינימלית. את (10) ניתן לרשום כמערכת משוואות לינאריות,

$$(11) \quad \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{(1)} & \left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_{(1)} & -E(1) & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{(N)} & \left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_{(N)} & -E(N) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta m \\ \delta c \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{(1)} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{(N)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}$$

נסמן ב-  $A$  את המטריצה שבצד שמאל של משוואה זו. נסמן ב-  $U, Q, V$  את פירוק ה-SVD של  $A$  (כלומר,  $A = UQV^T$ , כאשר  $U_{N \times 4}, V_{4 \times 4}$  אורתונורמליות ואילו  $Q_{4 \times 4}$  אלכסונית). ניתן להראות (Press et al., 1992) כי הפתרון האופטימלי של (10) במובן שגיאה ריבועית ממוצעת הינו

$$(12) \quad \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta m \\ \delta c \end{pmatrix} = -VQ^{-1}U^T \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{(1)} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{(N)} \end{pmatrix}$$

קיימות שיטות יעילות מאוד (לינאריות ב-  $N$ ) לחישוב ה-SVD. חישוב ההפכי של  $Q$  הוא מיידי מכיוון שזו מטריצה אלכסונית. לכן ניתן למצוא את הפתרון האופטימלי של (10) באופן יעיל ביותר.

```
% flow - calculate revised optical flow
% flow(f1,f2)
% f1, f2 - file names of two frames in movie, on which calculation is based

function flow(f1,f2)

% read image files
Im1=double(imread(f1));
Im2=double(imread(f2));

% normalize to range 0-1
Im1 = Im1 / 256;
Im2 = Im2 / 256;

% display images on screen
figure;
```



```

subplot(4,2,1); imshow(Im1,[]); title('Image1');
subplot(4,2,2); imshow(Im2,[]); title('Image2');

[M,N] = size(Im1);

% window size parameter (a square window of smooth-by-smooth pixels is used)
smooth = 13; % window size is 11x11, but we need two more pixels for
gradient calculation
hsmooth = floor(smooth/2);

% repeat for every block in image
for m=(hsmooth+1):smooth:(M-hsmooth-1)
    %fprintf('%0.0f%% complete...\n',100*m/M);
    for n=(hsmooth+1):smooth:(N-hsmooth-1)
        % Take local section of image
        a = Im1((m-hsmooth):(m+hsmooth), (n-hsmooth):(n+hsmooth));
        b = Im2((m-hsmooth):(m+hsmooth), (n-hsmooth):(n+hsmooth));

        % Calculate derivatives
        e = (a+b)/2; %mean power
        e_t = (b-a);
        e_x = e(3:end,2:end-1)-e(1:end-2,2:end-1);
        e_y = e(2:end-1,3:end)-e(2:end-1,1:end-2);

        e = e(2:end-1,2:end-1); % to ensure that e is same length as e_x,e_y
        e_t = e_t(2:end-1,2:end-1);

        % Generate matrix A (see text)
        A = [e_x(:) e_y(:) e(:) -ones(size(e,1)*size(e,2),1)];

        % Solve using SVD
        [U,S,V] = svd(A,0);
        if(S(end,end)/S(1,1) < 1e-10)
            % matrix is ill-conditioned; ignore this data point
            mmse=zeros(4,1);
        else
            mmse = V*diag(1./diag(S))*U'*e_t(:); % MMSE solution for deltas
        end;

        % Store results
        i = (m-hsmooth-1)/smooth+1;
        j = (n-hsmooth-1)/smooth+1;
        delta_x(i,j) = mmse(1);
        delta_y(i,j) = mmse(2);
        delta_m(i,j) = mmse(3);
        delta_c(i,j) = mmse(4);
    end;
end;

% plot delta-x and delta-y components as a quiver-plot
subplot(2,1,2);
quiver(-delta_y(end:-1:1,:),delta_x(end:-1:1,:));
set(gca,'XTick',[]); set(gca,'YTick',[]);
title('\delta x, \delta y quiver plot');

% plot delta-m and delta-c
subplot(4,2,3); imshow(delta_m); title('\delta m/\delta t');
subplot(4,2,4); imshow(delta_c); title('\delta c/\delta t');
fprintf('delta m: mean=%.2f, SD=%.2f, min=%.2f, max=%.2f\n',
mean(delta_m(:)), std(delta_m(:)), min(delta_m(:)), max(delta_m(:)));
fprintf('delta c: mean=%.2f, SD=%.2f, min=%.2f, max=%.2f\n',
mean(delta_c(:)), std(delta_c(:)), min(delta_c(:)), max(delta_c(:)));
set(gcf,'PaperPositionMode','auto'); % comes out better when printed

```

- Burt, P.J., and Adelson, E.H. (1983), "The Laplacian pyramid as a compact image code." *IEEE Trans. on Comm.*, 31 (4), pp 532-540.
- Horn, B.K.P. (1986), *Robot Vision*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Horn, B.K.P., and Schunk, B.G. (1981), "Determining optical flow." *Artif. Intel.*, vol. 17.
- Jain, A.K. (1989), *Fundamentals of Image Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Kearney, J.K., Thompson, W.B., and Boley, D.L. (1987), "Optical flow estimation: an error analysis of gradient-based methods with local optimization." *IEEE Trans. on Patt. Anal. and Mach. Intel.*, 9 (2), pp 229-244.
- Negahdaripour, S. (1998), "Revised definition of optical flow: Integration of radiometric and geometric cues for dynamic scene analysis." *IEEE Trans. on Patt. Anal. and Machine Intell.*, 20 (9), pp 961-979.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., and Flannery, B.P. (1992), *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press.